## 1 | Nochmalform

Bestimmen Sie die Hessenormalformen der folgenden affinen Hyperebenen.

(a) $L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

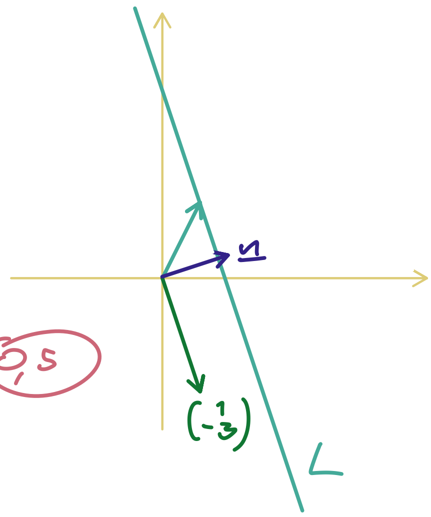
(b) $P := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

(c) $Q := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+i \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}^3$

a: $\underline{m} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\underline{n} := \frac{\underline{m}}{\|\underline{m}\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ 0,5

$d = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{n} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 5 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}}$ 0,5




$L = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \underline{v}, \underline{n} \rangle = d \}$

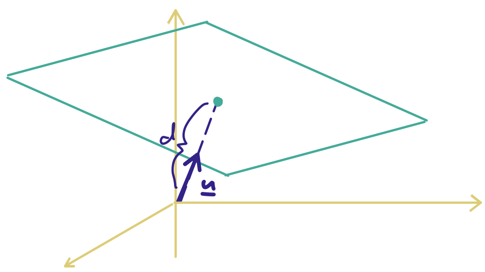
b: $\underline{m} := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$ 0,5 $\left( \underline{\tilde{n}} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{\tilde{n}} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per Konstruktion} \right)$

$\underline{\tilde{n}} := \frac{\underline{m}}{\|\underline{m}\|} = \frac{1}{\sqrt{64+36+225}} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{325}} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{5^2 \cdot 13}} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$ 0,5

$\tilde{d} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\tilde{n}} \right\rangle = \frac{-24}{5 \cdot \sqrt{13}} < 0$

0,5



$$\underline{n} := -\underline{u} = \frac{1}{5\cdot\sqrt{13}}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$d := -\tilde{d} = \frac{24}{5\cdot\sqrt{13}}$$

0,5

$$P = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \underline{v}, \underline{n}\rangle = d\}$$

c: Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+i \end{pmatrix}$

Dann ist $a\cdot(-i) + b = 0$ und $a + c(2-i) = 0$

Mit $c = 1$ ergibt sich: $a = -2+i$, $b = ia = -1-2i$

Wähle also

$$\underline{m} := \begin{pmatrix} -2+i \\ -1-2i \\ 1 \end{pmatrix}$$ 0,5 (nicht eindeutig)

$$\tilde{\underline{n}} := \frac{\underline{m}}{\|\underline{m}\|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -2+i \\ -1-2i \\ 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$\tilde{d} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{n} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{11}}\big((-2-i) + 1\big) = \frac{1}{\sqrt{11}}(-1-i)$$ 0,5

Problem: $\tilde{d} \notin \mathbb{R}$.

Verfahre daher wie im Beweis zu 10.25:

$$z := \frac{\tilde{d}}{|\tilde{d}|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot(-1-i)}{\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i).$$

$$\underline{n} := z\cdot\tilde{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -2+i \\ -1-2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{11}}\cdot\begin{pmatrix} 3+i \\ -1+3i \\ -1-i \end{pmatrix}$$

$$d := \bar{z}\cdot\tilde{d} = |\tilde{d}| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

0,5

$$Q = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^3 \mid \langle \underline{v}, \underline{n}\rangle = d\}$$

## 2 | Rotati Club

Welche der folgenden reellen Matrizen liegen in O(3)? Welche in SO(3)?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -13 \\ 6 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + (-4)^2 + 6^2 \neq 1, \text{ also } A \notin O(3)$$

0,5

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$$

Also $B \in O(3)$. 0,5

$$\det(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-1 + 8 + 8 - (-4) - (-4) - (-4)\right)$$

$$= \frac{1}{3^3}(27) = 1.$$

Also $B \in SO(3)$ 0,5

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also $C \in O(3)$. 0,5

$$\det C = \det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot (-1)$$

$$= -1.$$

Also $C \notin SO(3)$. 0,5

Welche der folgenden komplexen Matrizen liegen in U(3)? Welche in SU(3)?

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} \right\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \neq 1.$$

Also $D \notin U(3)$. 0,5

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$E^T \cdot E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\, i & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\, i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2}\, i & 1/\sqrt{2}\, i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i^2 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i^2 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i^2 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i^2 & 0 \\ 0 & 0 & -i^2 \end{pmatrix}$$

$= \mathbb{1}_3$, also $E \in U(3)$. 0,5

$\det(E) = \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i\right) \cdot i = i^2 = -1$, also

$E \notin SU(3)$ 0,5

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F^T \cdot F = F^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= \mathbb{1}_3$, also $F \in U(3)$. 0,5

$\det(F) = i^2 \cdot (-1) = 1$, also $F \in SU(3)$. 0,5

## 3 | Auf Achse

Seien $f, g$ Isometrien von $\mathbb{R}^3$ mit $fg = gf$ und $\det(f) = \det(g) = 1$. Zeigen Sie, dass entweder $f$ und $g$ Drehungen um dieselbe Achse sind, oder dass eine ON-Basis existiert, bezüglich derer sowohl $f$ als auch $g$ Diagonalgestalt haben.

*Unter einer Rotation verstehen wir in dieser Aufgabe eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$, die bezüglich einer geeigneten ON-Basis gegeben ist durch eine Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

*mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$. Unter einer Drehachse verstehen wir dann eine Ursprungsgerade, die punktweise von dieser Rotation fixiert wird. Sie können sich leicht überlegen, dass diese Begriffe ihrer anschaulichen Bedeutung entsprechen, müssen dies aber nicht als Teil Ihrer Lösung nachweisen. Für eine nicht-triviale Rotation gibt es genau eine Drehachse. Diese Drehachse ist der Eigenraum der Rotation zum Eigenwert 1.*

Der Struktursatz für Isometrien zeigt, dass jede Isometrie von $\mathbb{R}^3$ mit Determinante $+1$ von einem der folgenden Typen ist:

Typ A: $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, dargestellt von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in jeder Basis

Typ B: nicht-triviale Rotation, dargestellt durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ in einer geeigneten ON-Basis

Typ C: nicht-triviale Rotation, dargestellt durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$ in einer geeigneten ON-Basis, mit $a^2+b^2=1$ und $b \neq 0$.

Ferner ist jede Isometrie mit Determinante $+1$ von **genau** einem dieser Typen, denn

Typ B $\hat{=}$ nicht-triviale diagonalisierbare Rotation,

Typ C $\hat{=}$ nicht-diagonalisierbare Rotation

(Ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2+b^2=1$ diagonalisierbar, so

muss $\chi = (1-x)((a-x)^2+b^2) = (1-x)(x^2-2a+1)$

in $\mathbb{R}[X]$ in Linearfaktoren zerfallen. Aber

$$x^2-2a+1$$

zerfällt nur dann in $\mathbb{R}[X]$ in Linearfaktoren, wenn

$\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2-1} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-b^2}$ reell ist, also nur für $b=0$.)

Die drei Typen lassen sich ferner anhand der Dimensionen ihrer Eigenräume unterscheiden:

Typ A:

einziger EW ist 1; $\dim \mathrm{Eig}(-;1)=3$

Typ B:

EW sind $\pm 1$; $\dim \mathrm{Eig}(-;1)=1$, $\dim \mathrm{Eig}(-;-1)=2$

Typ C:

einziger EW ist 1; $\dim \mathrm{Eig}(-;1)=1$.

1 für alle Vorüberlegungen bis hier

---

Lemma: Die Eigenräume von $f$ sind $g$-stabil. 1

Beweis:

$\underline{v} \in \mathrm{Eig}(f;a) \Rightarrow f(g(\underline{v})) \overset{fg=gf}{=} g(f(\underline{v})) = g(a\cdot\underline{v}) = a\cdot g(\underline{v})$,

also $g(\underline{v}) \in \mathrm{Eig}(f;a)$ □

---

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

$\{\text{Typ } f, \text{Typ } g\} = \{A,A\}, \{A,B\}$ oder $\{A,C\}$ 0,5

Dieser Fall ist trivial, da $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ in jeder Basis diagonalisierbar ist und als (triviale) Rotation um jede beliebige Achse interpretiert werden kann.

$\{\text{Typ } f, \text{Typ } g\} = \{B, B\}$

(*)

Sei $\underline{v}$ ein EV von $f$ zum EW 1, OE $\|\underline{v}\| = 1$

Da $\mathrm{Eig}(f;1) = \langle \underline{v} \rangle$ $g$-stabil ist, ist $\underline{v}$ auch ein EV von $g$. Da $g$ nur die EW $\pm 1$ hat, folgt $g(\underline{v}) = \pm \underline{v}$.

Falls $g(\underline{v}) = \underline{v}$, folgt

$$\mathrm{Eig}(g;1) = \mathrm{Eig}(f;1).$$

Also sind $f$ & $g$ Rotationen um dieselbe Achse.

1,5

Falls $g(\underline{v}) = -\underline{v}$, betrachte $W := \mathrm{Eig}(f;-1)$.
$W$ ist $g$-stabile Ebene, und $g|_W : W \to W$ ist eine Isometrie.

$$\det(g) = \det(g|_{\langle \underline{v} \rangle}) \cdot \det(g|_W),$$

also folgt

$$\det(g|_W) = -1.$$

Der Strukturssatz für Isometrien von $\mathbb{R}^2$ zeigt daher: $g|_W$ hat in einer geeigneten ON-Basis $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ von $W$ die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Da $f$ Isometrie ist, ist $W \perp \langle \underline{v} \rangle$. Also ist $(\underline{v}, \underline{w}_1, \underline{w}_2)$ ON-Basis von $\mathbb{R}^3$.
In dieser Basis werden $f$ und $g$ dargestellt durch

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_B M_B(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

haben also beide Diagonalgestalt.

$\{\text{Typ } f, \text{Typ } g\} = \{B, C\}$ oder $\{C, C\}$

(**) OE $g$ von Typ C. Dann folgt genau wie im vorherigen Fall

$$\mathrm{Eig}(g;1) = \mathrm{Eig}(f;1).$$

Also sind $f$ & $g$ wieder Rotationen um dieselbe Achse.

(*) + (**) zusammen ① 

**4 | Spurlos**

Sei $V \subset \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ der $\mathbb{R}$-lineare Unterraum aller Matrizen $B$ mit $\bar{B}^T = -B$ und $\mathrm{tr}(B) = 0$.

(a) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ und zeigen Sie, dass das Tripel $(A, B, C)$ mit

$$A := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $V$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\langle M, N \rangle := -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M \cdot N)$$

ein Skalarprodukt auf $V$ definiert und dass die Basis aus Aufgabenteil (a) eine ON-Basis ist.

a: 2,5

Sei $B := \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$

$\bar{B}^T = -B$ und $\mathrm{tr}(B) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\bar{u} = -u$, $\bar{x} = -x$ und $w = -\bar{v}$, und $x + u = 0$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(x) = 0$, $w = -\bar{v}$, und $x = -u$

$\Leftrightarrow$ $B = \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Wir haben daher eine Bijektion

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{z} V$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix},$$

und man sieht leicht, dass diese $\mathbb{R}$-linear ist.
Also ist $z$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-VR
und $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$.
Da $z$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ auf $(A, B, C)$ abbildet, ist $(A, B, C)$ Basis von $V$.

b: $\langle -,- \rangle$ ist bilinear:

$$\langle M+M', N\rangle = -\tfrac{1}{2}\,tr((M+M')\cdot N)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,tr(MN + M'N)$$
$$= -\tfrac{1}{2}(tr(MN) + tr(M'N))$$
$$= \langle M, N\rangle + \langle M', N\rangle$$

$$\langle a\cdot M, N\rangle = -\tfrac{1}{2}\,tr(a\cdot MN)$$

$a \in \mathbb{R}$

$$= -\tfrac{1}{2}(a\cdot tr(MN))$$
$$= a\cdot\langle M, N\rangle$$

$$\left.\begin{aligned}\langle M, N+N'\rangle &= \langle M, N\rangle + \langle M, N'\rangle\\ \langle M, a\cdot N\rangle &= a\cdot\langle M, N\rangle\end{aligned}\right\}\text{ analog}$$

0,5

$\langle -,- \rangle$ ist symmetrisch:

**Option A:**

Hier kann man z.B. benutzen

$$tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$$

für beliebige $n\times n$-Matrizen $A$ und $B$.

(Für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ gilt:

$$tr(A\cdot B) = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} b_{ji}\Big)$$
$$tr(B\cdot A) = \sum_i \Big(\sum_j b_{ij} a_{ji}\Big)$$
)

**Option B:** Darstellungsmatrix vollständig ausrechnen und bemerken, dass sie symmetrisch ist.

Darstellungsmatrix bezüglich der Basis $(A, B, C)$ aus (a):

$$\langle A, A \rangle = -\frac{1}{2} tr(A^2) = -\frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle A, B \rangle = -\frac{1}{2} tr(A \cdot B) = -\frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle A, C \rangle = -\frac{1}{2} tr(A \cdot C) = -\frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle B, B \rangle = -\frac{1}{2} tr(B^2) = -\frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle B, C \rangle = -\frac{1}{2} tr(B \cdot C) = -\frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle C, C \rangle = -\frac{1}{2} tr(C^2) = -\frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

[....]

Also ist $M_{(A,B,C)}(\langle -,- \rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Das zeigt, dass $\langle -,- \rangle$ positiv definit, also ein Skalarprodukt ist, und auch, dass $(A, B, C)$ eine ON-Basis ist.

2,0